第 7 回 数学を楽しむ会

小又 志郎

2012 年 9 月 15 日

概要

デカルト (解析幾何学), ニュートン (運動の法則, 万有引力の法則) にまつわる数学の紹介をします (主に, 高校の数学・物理の復習). 具体的には, ニュートン力学で惑星の楕円軌道を導くために, どのような数学が必要かを調べます.

1 楕円

デカルト座標

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

(楕円の焦点を中心とした) 極座標 ($\leftarrow$ 三角関数が必要 !)

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

楕円の式に代入して整理すると,

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi$$

ただし,

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad \text{(離心率)}$$
$$p = a(1 - e^2) \quad \text{((半) 通径)}$$

同様の式は, 双曲線や放物線でも得られる (略).

2 質点の軌道

エネルギー保存

$$E = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + U(\boldsymbol{r})$$

ただし,

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \quad (\leftarrow \text{微分が必要!})$$

極座標では,

$$\boldsymbol{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

よって, エネルギーの式は (中心力ポテンシャル $U(\boldsymbol{r}) = U(r)$ を仮定)

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r)$$

これは, r, $\dot{r}$, $\dot{\varphi}$ を含む式. これから微分を消去して (積分が必要!), r と φ の関係式を導けば, それが求める軌道.

角運動量保存 (面積速度一定, ケプラーの第 2 法則)

$$M = mr^2\dot{\varphi} = \text{一定}$$

これを用いて $\dot{\varphi}$ を消去すると,

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$$

r と $\dot{r}$ のみを変数として含む式になったので, あとは積分すれば OK. $\dot{r}$ について解くと,

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}$$

変数分離 (左辺は t のみ, 右辺は r のみにまとめる)

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}}$$

求めたいのは, t と r の関係よりも, φ と r の関係だったから, 角運動量保存の式

$$M = mr^2\dot{\varphi} = mr^2\frac{d\varphi}{dt}$$

より

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt$$

を用いれば,

$$d\varphi = \frac{(M/r^2)dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}$$

積分して

$$\varphi = \int \frac{(M/r^2)dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + \text{const.}$$

3　万有引力の場合

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (\alpha > 0)$$

を代入して積分を実行すると

$$\varphi = \arccos\frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}}$$

ただし, $\varphi = 0$ のとき const. $= 0$ と選んだ.

さらに,

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$$

とおくと,

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi$$

参考文献

[1]『力学』(ランダウ=リフシッツ理論物理学教程), 東京図書, 1986
あるいは『力学・場の理論』(ランダウ=リフシッツ物理学小教程), ちくま学芸文庫, 2008