規格化

$$
\begin{aligned}
\int_0^L \|\Psi_n\|^2 dx &= \int_0^L \|e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \cdot sin\frac{\pi n x}{L}\|^2 dx \\
&= \int_0^L e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}E_n t} \cdot sin^2\frac{\pi n x}{L} dx \\
&= \int_0^L \frac{1 - cos\frac{2\pi n x}{L}}{2} dx \\
&= \left[\frac{x}{2} - \frac{L}{4\pi n x} sin\frac{2\pi n x}{L}\right]_0^L \\
&= \frac{L}{2}
\end{aligned}
$$

$(cos2x = cos^2x - sin^2x = 1 - 2sin^2x$ を使う$)$

つまり、元の Ψ_n に $\sqrt{\frac{2}{L}}$ を掛ければ絶対値が 1 になる。
次に $\Psi_n \cdot \Psi_m$ $(n \neq m)$ の時を考える。

$$
\begin{aligned}
\int_0^L \Psi_n \cdot \Psi_m dx &= \int_0^L sin\frac{\pi n x}{L} \cdot sin\frac{\pi m x}{L} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L cos\frac{\pi(n-m)x}{L} - cos\frac{\pi(n+m)x}{L} dx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

これは、次の三角関数の公式を使う。

$$cos(x+y) = cos\,x\,cos\,y - sin\,x\,sin\,y$$

この式に、$x+y$ と $x-y$ を入れて差を取ると、

$$cos(x-y) - cos(x+y) = cos\,x\,cos\,y + sin\,x\,sin\,y - (cos\,x\,cos\,y - sin\,x\,sin\,y) = 2sin\,x\,sin\,y$$